No. Date 12/4/19

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 5

Άσκηση 1

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{14} & * & * \\ 1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{14} & * & * \\ 1/\sqrt{3} & -3/\sqrt{14} & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

A ορθογώνιος ⇒ στήλες (γραμμές) αποτελούν ορθοκανονική βάση

α' τρόπος

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{14} & \alpha & \varepsilon \\ 1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{14} & \beta & \zeta \\ 1/\sqrt{3} & -3/\sqrt{14} & \gamma & \eta \\ 0 & 0 & \delta & \theta \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιώ την ορθοκανονικότητα για να δημιουργήσω σύστημα (όχι απαραίτητα γραμμικό) Άρα δεν έχω μοναδική λ

β' τρόπος:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{14} & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{14} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -3/\sqrt{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

ορθοκανονική

Εφαρμόζω G-S

- $v_4 = u_4 - \dfrac{\overset{\to 0}{\langle u_3, v_3 \rangle}}{\langle v_3, v_3 \rangle} \cdot v_3 - \dfrac{\overset{1/\sqrt{14}}{\langle u_4, v_2 \rangle}}{\langle v_2, v_2 \rangle} \cdot v_2 - \dfrac{\overset{1/\sqrt{3}}{\langle u_4, v_1 \rangle}}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1 =$

$$= (1,0,0,0) - \frac{1}{\sqrt{14}}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}, 0\right) =$$

$$= \left(\frac{25}{42}, \frac{-20}{42}, \frac{-5}{42}, 0\right) = (25, -20, -5, 0) =$$

$$= (5, -4, -1, 0)$$

- $w_4 = \dfrac{1}{\sqrt{42}}(5, -4, -1, 0)$ τελευταία στήλη ή το $-w_4$ είναι κάθετο

Άσκηση 2

$$\langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle = 4a_1b_1 + 2a_2b_2 + 8a_3b_3 =$$

$$= (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

- Η ιδιότητα $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$ λόγω της γραμμ. των πινάκων : $\langle a u, v \rangle = a \langle u, v \rangle$, $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

- Η 4η ιδιότητα $<u,u> \geq 0$ κ' $=0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$ ισχύει γιατί ο πίνακας είναι διαγώνιος με θετικά στοιχεία στη κύρια διαγώνιο $4a_1^2 + 2a_2^2 + 8a_3^2 \geq 0$

$T(x,y,z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{z}{2\sqrt{2}}\right)$ είναι ισομετρία

Για να είναι ισομετρία θα πρέπει να ισχύει: $<u,v> = <T(u),T(v)>$

$\Rightarrow <(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)> = <T(a_1,a_2,a_3), T(b_1,b_2,b_3)> \Rightarrow$

$\Rightarrow <a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3> = <\left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{\sqrt{2}}, \frac{a_3}{2\sqrt{2}}\right), \left(\frac{b_1}{2}, \frac{b_2}{\sqrt{2}}, \frac{b_3}{2\sqrt{2}}\right)>$

$= \frac{4a_1b_1}{2\,2} + 2\frac{a_2b_2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + 8\frac{a_3b_3}{2\sqrt{2}\,2\sqrt{2}}$ Άρα ισχύει

Άσκηση 4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Euler: A ορθογώνιος, $\det A = 1 \Rightarrow \exists \lambda_1 = 1$ & v_1 με $Av_1 = \lambda_1 v_1 = v_1$

$$(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ x-y=0 \\ -2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ x=y \\ z=0 \end{cases}$$

$V(1) = <(1,1,0)> =$
$= <\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0>$

Επεκτείνω σε ορθοκανονική βάση:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det P = 1$

$$P^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\cos\phi = -1 \Rightarrow$
$\phi = \pi$ rad

$$P^t \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\sin\phi = 0$

Άσκηση 5 $A=\begin{pmatrix} 1/2 & 3/2\sqrt{3} \\ 3/2\sqrt{3} & -1/2 \end{pmatrix}$ ορθογώνιος με $\det A=-1$, άρα έχει ιδιοτιμή το 1.

$(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x\sqrt{2}+3y=0$

$\begin{pmatrix} -1/2 & 3/2\sqrt{3} \\ 3/2\sqrt{3} & -3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 3x-3\sqrt{3}y=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$

$V(1)=\langle(1,\frac{1}{\sqrt{3}})\rangle=\langle(\sqrt{3},1)\rangle=\langle(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})\rangle$

Αυτός είναι ο άξονας συμμετρίας, γιατί αν πάρω πολλαπλάσιο του $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}):(\frac{\sqrt{3}t}{2},\frac{t}{2})$, τότε:

$A\begin{pmatrix} \sqrt{3}t/2 \\ t/2 \end{pmatrix}=A\left(t\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right)=tA\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Άρα ο A δεν μετακινεί το $(\frac{\sqrt{3}t}{2},\frac{t}{2})$

Ο άλλος ιδιόχωρος της ιδιοτιμής (−1) είναι $\perp V(1)$
Άρα $V(-1)=\langle(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})\rangle$

Πχ: ΝΔΟ ο πίνακας $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ παριστά στροφή
επιπέδου ως προς
άξονα ⊥ σε αυτό..

Ορθογώνιος $(-2,2,1)\perp(-1,-2,2)$
$(2,1,2)$

$(1/9)\cdot(2^2+2^2+1)=1$

$\det\frac{1}{3}(\ )=\det\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right)=\det\begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

$=\left(\frac{1}{3}\right)^3\det\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}=\left(\frac{1}{3}\right)^3\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}=$

$$= \frac{1}{3^3} \cdot 3^2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}(-1-2) = 1 \qquad \boxed{\lambda_1 = 1}$$

$$(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2/3-1 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3-1 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -5/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -5/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x+y-2z=0 \\ 2x-5y+z=0 \\ x+2y-z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = x+2y \\ 2x-5y+x+2y=0 \end{array} \right. \Rightarrow 3x-3y=0 \Rightarrow x=y \qquad \Rightarrow \qquad z=3x$$

$$V(1) = \langle (1,1,3) \rangle = \langle \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}} \right) \rangle$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{11} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{11} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 3/\sqrt{11} & 0 & 1 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = (0,0,1) - \frac{3}{\sqrt{11}}\left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}} \right)$$

$$= \left(\frac{-3}{11}, -\frac{3}{11}, 1-\frac{9}{11} \right) = \left(\frac{-3}{11}, -\frac{3}{11}, \frac{2}{11} \right)$$

$$(3,-3,2) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{22}}(3,3,-2)$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{11} & -1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \\ 1/\sqrt{11} & 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \\ 3/\sqrt{11} & 0 & -2/\sqrt{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{11} & -1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \\ 0 & 2/\sqrt{2} & 0 \\ 3/\sqrt{11} & 0 & -2/\sqrt{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1/\sqrt{11} & 3/\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{11} & -2/\sqrt{22} \end{pmatrix}$$

$$P^t A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5/6 & -\sqrt{11}/6 \\ 0 & \sqrt{11}/6 & -5/6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -5/6 & \sqrt{11}/6 \\ \sqrt{11}/6 & -5/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$\Rightarrow \cos\phi = \frac{5}{6} \Rightarrow \phi = \text{τοξ}\cos\frac{5}{6}$

Η γωνία θα είναι $\phi = \pi - \text{τοξ}\cos\frac{5}{6}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \cos\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \overset{\cos\phi}{\cos(-\phi)} & \overset{-\sin\phi}{-\sin(-\phi)} \\ 0 & \underset{-\sin\phi}{\sin(-\phi)} & \underset{\cos\phi}{\cos(-\phi)} \end{pmatrix}$$

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Αν $A \in M(n\times n, \mathbb{R})$ θα καλείται συμμετρικός αν $A = A^t$. Το σύνολο των συμμετρικών πινάκων: $\Sigma(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n\times n,\mathbb{R}),\ A = A^t\}$ αποτελεί υπόχωρο του $M(n\times n,\mathbb{R})$, διότι άθροισμα συμμετρικών = συμμετρικός, γινόμενο αριθμού με συμμετρικό = συμμετρικός.

- **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Δύο συμμετρικοί πίνακες A κ' B θα καλούνται **ορθογώνια όμοιοι** αν υπάρχει ορθογώνιος P με $A = PBP^t$

- **ΛΗΜΜΑ**: Οι ιδιοτιμές ενός πραγματικού συμμετρικού πίνακα είναι όλες πραγματικές.

* **Απόδειξη**: Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή κ' u ιδιοδιάνυσμα του συμμετρικού πίνακα A.

$Au = \lambda u$ (στήλη). Θέλω $\lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lambda = \bar{\lambda}$

$Au = \lambda u \Rightarrow (\overline{Au}) = \overline{\lambda u} \Rightarrow \bar{A}\bar{u} = \bar{\lambda}\bar{u}$ $\qquad A = A^t = \bar{A}$

$A\bar{u} = \bar{\lambda}\bar{u} \Rightarrow (A\bar{u})^t = (\bar{\lambda}\bar{u})^t \Rightarrow \bar{u}^t A^t = \bar{\lambda}\bar{u}^t \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{u}^t A = \bar{\lambda}\bar{u}^t \Rightarrow \bar{u}^t A u = \bar{\lambda}\bar{u}^t u \Rightarrow \bar{u}^t(\lambda u) = \bar{\lambda}\bar{u}^t u \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \lambda\bar{u}^t u = \bar{\lambda}\bar{u}^t u \Rightarrow (\lambda\cdot\bar{\lambda})\bar{u}^t\cdot u = 0 \\ \bar{u}^t\cdot u = \|u\|^2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda - \bar{\lambda} = 0 \Rightarrow \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$$

- **ΛΗΜΜΑ:** Έστω $A=A^t$. Σε διαφορετικές ιδιοτιμές αντιστοιχούν κάθετα ιδιοδιανύσματα.

Απόδειξη: έστω λ_1, λ_2 ιδιοτιμές του A με $\lambda_1 \neq \lambda_2$, κ
$Au_1 = \lambda_1 u_1$, $Au_2 = \lambda_2 u_2$ (u_1, u_2 στήλες). Θέλω $u_1 \perp u_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \langle u_1^t, u_2^t \rangle = 0$

$$\left.\begin{array}{l} Au_1 = \lambda_1 u_1 \Rightarrow u_2^t A u_1 = u_2^t \lambda_1 u_1 \Rightarrow (u_2^t A) u_1 = \lambda_1 u_2^t u_1 \\ Au_2 = \lambda_2 u_2 \Rightarrow u_2^t A^t = \lambda_2 u_2^t \Rightarrow u_2^t A = \lambda_2 u_2^t \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\lambda_2 u_2^t) u_1 = \lambda_1 u_2^t u_1 \Rightarrow \lambda_2 u_2^t u_1 - \lambda_1 u_2^t u_1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_1) u_2^t u_1 = 0 \Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_1) \langle u_2^t, u_1^t \rangle = 0$
Άρα $\langle u_2^t, u_1^t \rangle = 0 \Leftrightarrow u_2 \perp u_1$

- **ΦΑΣΜΑΤΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ**

Κάθε πραγματικός συμμετρικός πίνακας είναι ορθογώνιος όμοιος με έναν πραγματικό διαγώνιο πίνακα.

- **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Αν ο A πραγματικός συμμετρικός, τότε διαγωνοποιείται κ οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές και υπάρχει ορθοκανονικό σύνολο ιδιοδιανυσμάτων. Δηλ. υπάρχει πραγματικός ορθογώνιος πίνακας P κ διαγώνιος τ.ω.
$A = P \Lambda P^t$

πχ: $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ Να διαγωνοποιηθεί.

$$\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 8-\lambda & 2 & 2 \\ 8-\lambda & 4-\lambda & 2 \\ 8-\lambda & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (8-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (8-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$= (8-\lambda)(2-\lambda)^2$. Άρα $\lambda_1 = 8$ κ $\lambda_2 = \lambda_3 = 8$

$A=A^t \Rightarrow A$ διαγωνοποιείται $(\leftarrow)$ $\dim V(8)=1$ $\quad \dim V(2)=2$

$$(A-8I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}2x=y+z\\2y=x+z\\2z=x+y\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y=2x-z \Rightarrow y=x \\ 4x-2z=x+z \Rightarrow 3x=3z \Rightarrow z=x\end{array}$$

$V(8)=<\underset{u_1}{(1,1,1)}>=<(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})>$

$$(A-2I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x+y+z=0 \Rightarrow z=-x-y$

$V(2)=<(x,y,-x-y)>=<\overset{u_2}{(1,0,-1)},\overset{u_3}{(0,1,-1)}>=$

$=<(\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{-1}{\sqrt2}),(0,\frac{1}{\sqrt2},\frac{-1}{\sqrt2})>$

Έχω $u_1 \perp u_2, u_3 \Rightarrow V(8) \perp V(2)$

$$P=\begin{pmatrix}1/\sqrt3 & 1/\sqrt2 & 0\\ 1/\sqrt3 & 0 & 1/\sqrt2\\ 1/\sqrt3 & -1/\sqrt2 & -1/\sqrt2\end{pmatrix} \qquad P^{-1}=P^t \quad \underline{\text{όχι}}$$

$v_3=u_3-\frac{<u_3,u_2>}{<u_2,u_2>}u_2=(0,1,-1)-\frac{1}{2}(1,0,-1)=$

$=(\overset{-1}{-\frac{1}{2}},\overset{2}{1},\overset{-1}{-\frac{1}{2}})$ Άρα $V(2)=<(\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{-1}{\sqrt2}),(\frac{-1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},\frac{-1}{\sqrt6})>$

- **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Έστω A πραγματικός πίνακας. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα: (i) Ο A είναι ορθογώνια ισοδύναμος με πραγματικό διαγώνιο πίνακα.
  (ii) Ο A έχει ένα ορθοκανονικό σύνολο ιδιοδιανυσμάτων.
  (iii) Ο A είναι συμμετρικός.

Απόδειξη: (i) $\exists P$ ορθογώνιος & Λ διαγώνιος. $A=P\Lambda P^t$

$A^t=(P\Lambda P^t)^t=(P^t)^t\Lambda^t P^t=P\Lambda P^t=A$.

(ii) $< u_1, \ldots, u_n >$ ορθοκανονικό σύνολο ιδιοδιανυσμάτων

Για $P = (u_1, \ldots, u_n)$ -> στήλες

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} A = P \Lambda P^{-1} \\ P \text{ ορθογώνιος} \end{array} \right\} \Rightarrow A = P \Lambda P^t \Rightarrow A = A^t.$$